# REPERAGE DANS L'ESPACE

**Plan** *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

*********************



*********************

## *I. Notion de point matériel.*

1ère Définition : un point matériel est un système matériel de petites dimensions vis-à-vis des moyens d'observation utilisés (une étoile de notre galaxie, observée à l'œil nu, pourra être assimilée à un point matériel).
Mais cette définition est manifestement insatisfaisante ; prenons l'exemple d'un petit morceau de matière en mouvement sur un plan incliné :


- Un petit palet glissera (avec ou sans frottements) sur le plan (①)
- Une petite bille pourra rouler, glisser et même pivoter sur le plan (②).

L'étude du mouvement sera donc différente dans les 2 cas : le cas ① relèvera de la « mécanique du point », le cas ② de la « mécanique du solide » (aussi petite soit la bille).

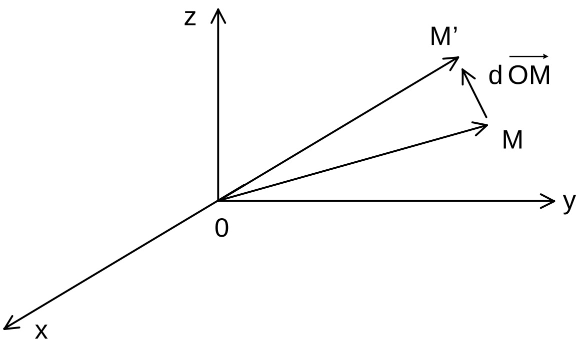
2e définition : un point matériel « libre » (de se mouvoir dans l'espace, sans aucune « liaison ») est un système matériel possédant 3 degrés de liberté (paramètres indépendants permettant de décrire complètement le système) : ses coordonnées.
Par opposition, un solide « libre » possèdera 6 degrés de liberté (3 degrés de translation et 3 degrés de rotation).

*Rem.* : en cas d'existence de « liaisons » : $n \leq 3$ pour un point matériel, $n \leq 6$ pour un solide ($n$ nombre de degrés de liberté).

*Exemple* :
*Dans le cas ①, le palet, posé sans vitesse sur le plan, possède 1 degré de liberté $x$.
*Dans le cas ②, la bille (toujours posée sans vitesse), possède a priori 3 degrés de liberté : $x$, $\theta$ (pivotement), $\varphi$ (roulement)
Pour repérer un point matériel libre, on définit ses coordonnées dans une base orthonormée directe (BOND).
On utilise usuellement en physique 3 systèmes de coordonnées.

## II. Coordonnées cartésiennes.

On utilise la BOND « fixe » $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ :




$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

(vecteur position)

A priori, le point M sera mobile dans l'espace. En munissant le repère d'une horloge (repère de temps), on aura alors :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{x} + y(t)\,\vec{y} + z(t)\,\vec{z}$$

Si M' est la position du mobile à l'instant t + dt, ses coordonnées sont : x + dx, y + dy, z + dz. Ainsi :

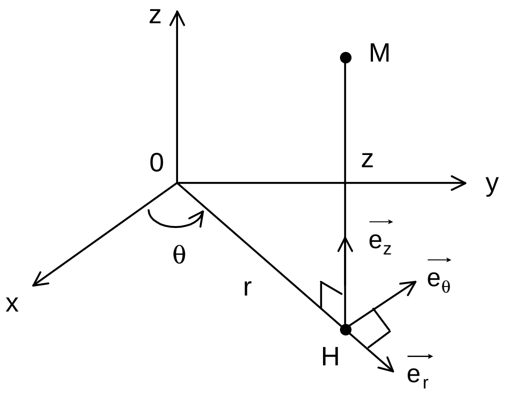
$$\overrightarrow{OM}'(t) = (x + dx)\,\vec{x} + (y + dy)\,\vec{y} + (z + dz)\,\vec{z}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM}' = d\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur « <u>déplacement élémentaire</u> » (pendant l'intervalle de temps « élémentaire » dt) associé au mobile M.
En coordonnées cartésiennes, nous avons donc :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{x} + dy\,\vec{y} + dz\,\vec{z}}$$

## III. Coordonnées cylindriques.

On les utilise quand on a un problème à « symétrie cylindrique » d'axe 0z ; elles simplifient également l'étude de certains problèmes de mécanique (cf mouvements à force centrale).




Soit H la projection orthogonale de M sur le plan 0xy.

Les 3 coordonnées cylindriques du point M sont :

$$\begin{cases} r = OH \in [0, +\infty[ \\ \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \in [0, 2\Pi] \\ z = \overline{HM} \in ]-\infty, +\infty[ \end{cases}$$

On utilise alors la base « locale » (ou « mobile ») de coordonnées $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ telle que :

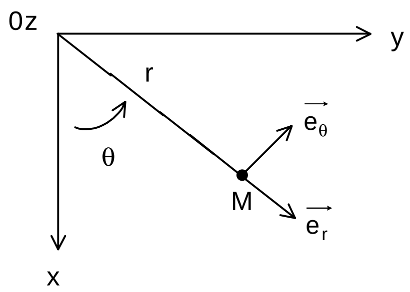
$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{r} & \text{vecteur « radial »} \\ \overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} & \text{vecteur « orthoradial »} \\ \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{z} & \end{cases}$$

Dans ces conditions : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$

On remarquera que, si M se déplace au cours du temps, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ « varient ».

Donc : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\overrightarrow{e_r}(t) + z(t)\,\overrightarrow{e_z}}$ ($\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{z}$ est « fixe »)

*Rem.* : pour un point M restant dans le plan 0xy, on le repère par ses coordonnées $(r, \theta)$, appelées coordonnées « polaires » :




$$\boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array}}$$

**Propriété fondamentale**

On a :
$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{x} + \cos\theta\,\overrightarrow{y} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \\[2ex] \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\ \vec{e}_r \end{cases}}$$

(Dériver un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire θ revient à faire une rotation de $\frac{\Pi}{2}$).

Ensuite :

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} \\[2ex] \dot{\vec{e}}_\theta = \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\ \vec{e}_\theta \\[1ex] \dot{\vec{e}}_\theta = -\ \dot{\theta}\ \vec{e}_r \end{cases}}$$

**<u>Vecteur déplacement élémentaire</u> :**

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

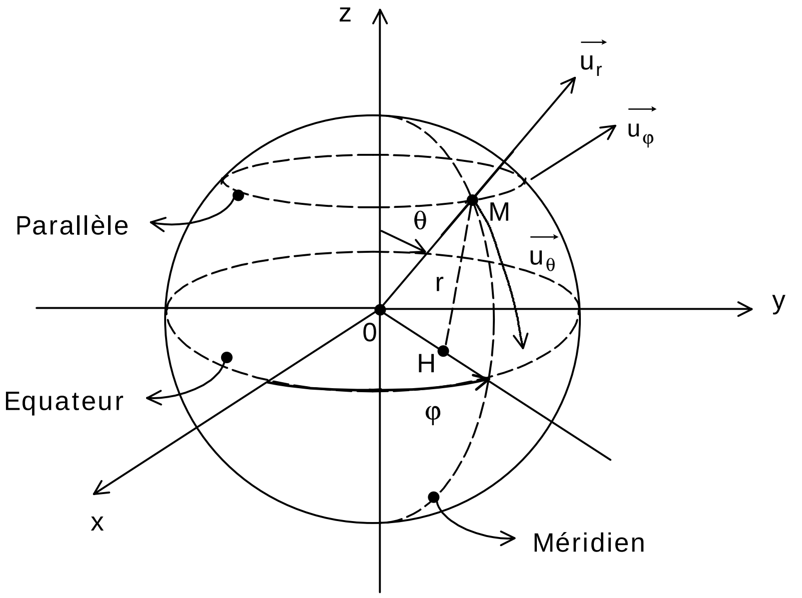
$$\Rightarrow \quad d\overrightarrow{OM} = (dr\,\vec{e}_r + r\underbrace{d\vec{e}_r}_{\vec{e}_\theta\,d\theta}) + dz\ \vec{e}_z$$

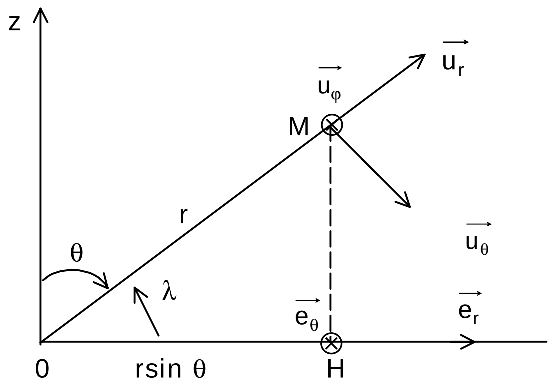
Ainsi :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\ \vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z}$$

## *IV. Coordonnées sphériques :*

On les utilise pour un problème à symétrie sphérique. Imaginons un point sur une sphère de centre 0 :




$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

Les 3 coordonnées sphériques du point M sont définies par :

$$\begin{cases} r = OM \in [0, +\infty[ \\ \theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) \in [0, \Pi] \quad \text{colatitude} \\ \varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH}) \in [0, 2\Pi] \quad \text{longitude} \end{cases}$$

***Rem.*** :

- $\lambda = \dfrac{\Pi}{2} - \theta$ est la latitude du lieu associée au point M.
- Le « $\varphi$ » des sphériques est le « $\theta$ » des cylindriques.
- Le « r » des cylindriques (OH) est le « $r\sin\theta$ » des sphériques.

Attention donc aux confusions !..

La base locale de coordonnées sphériques est notée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$, définie par :

$$\begin{cases} \vec{u_r} = \dfrac{\vec{OM}}{r} & \text{vecteur radial} \\ \vec{u_\theta} & \text{vecteur orthoradial, directement orthogonal à } \vec{u_r} \text{ dans le plan méridien (plan } (\vec{Oz}, \vec{OM})) \\ \vec{u_\varphi} = \vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} & \text{(tangent au parallèle)} \end{cases}$$

***Rem.*** **:**

- $\vec{u_\varphi} = \vec{e_\theta}$ (attention encore aux confusions).
- En termes « géographiques » :

$$\begin{cases} \vec{u_r} \text{ est selon la verticale ascendante au lieu} \\ \vec{u_\theta} \text{ est dirigé vers le Sud} \\ \vec{u_\varphi} \text{ est dirigé vers l'Est} \end{cases}$$

En coordonnées sphériques, le vecteur position est :

$$\boxed{\vec{OM}(t) = r(t)\ \vec{u_r}\ (t)}$$

On peut déterminer là aussi le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM}$.

Exprimons pour cela $\vec{OM}$ dans la base $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ :

$$\vec{u_r} = \cos\theta\ \vec{z} + \sin\theta\ \vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{u_r} = \cos\theta\ \vec{z} + \sin\theta\cos\varphi\ \vec{x} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{y}$$

Ainsi :

$$d\vec{u_r} = -\sin\theta\ d\theta\vec{z} + [\cos\theta\ d\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\ d\varphi]\ \vec{x} + [\cos\theta\ d\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\ d\varphi]\ \vec{y}$$

Soit :

$$d\vec{u_r} = d\theta\ [\underbrace{\cos\theta\ \vec{e_r} - \sin\theta\ \vec{z}}_{\vec{u_\theta}}] + \sin\theta\ d\varphi\ [\underbrace{\cos\varphi\ \vec{y} - \sin\varphi\ \vec{x}}_{\vec{e_\theta} = \vec{u_\varphi}}]$$

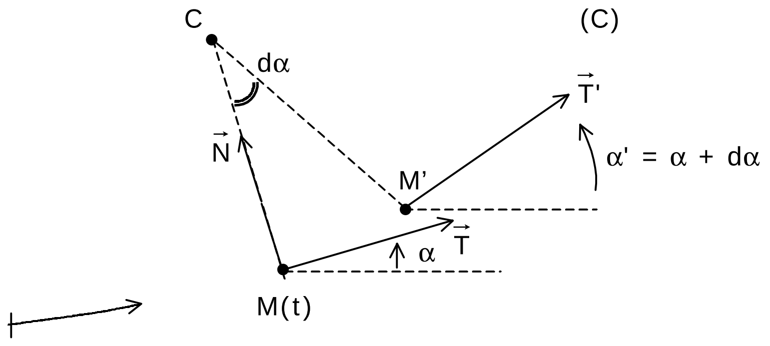
Finalement : $\qquad d\vec{u_r} = \vec{u_\theta}\ d\theta + \vec{u_\varphi}\ \sin\theta\ d\varphi$

Et : $\qquad \boxed{d\vec{OM} = dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\ d\varphi\ \vec{u_\varphi}}$

## V. *Le trièdre de Frenet :*

On utilise en mécanique la base de Frenet pour repérer un point dont on connaît a priori la trajectoire (point lié à une courbe par exemple).




Le point lié M peut se repérer à l'aide de la seule donnée de son abscisse curviligne :

$$\underline{s(t) = \overset{\frown}{OM}(t)} \qquad \text{(algébrique)}$$

Si M' est infiniment voisin de M sur (C) (position du mobile à l'instant t + dt) :

$$ds = \overset{\frown}{MM'} \approx MM' = \left\| d\,\overrightarrow{OM} \right\|$$

On définit alors la base du trièdre de Frenet par :

$$\begin{cases} \vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \text{ vecteur tangent unitaire} \\ (\vec{T} \text{ parallèle à } \overrightarrow{MM'} \text{ est tangent à (C) ; } \|\vec{T}\| = \dfrac{\left\| d\,\overrightarrow{OM} \right\|}{ds} = 1) \\ \vec{N} \text{ vecteur normal principal} \\ \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \text{ vecteur binormal} \end{cases}$$

$\vec{N}$ est le vecteur unitaire, perpendiculaire à $\vec{T}$, dirigé vers <u>l'intérieur de la concavité</u>, appartenant au « plan osculateur » (plan « local » de la courbe (C) ; si (C) est plane, $\vec{N}$ est dans son plan).

**Rayon et centre de courbure**

Soit $\alpha$ l'angle que fait $\vec{T}$ avec une direction fixe du plan (osculateur).

De M à M', $\vec{T}$ a « tourné » de $d\alpha$.

On pose donc :

$$\boxed{R = \left|\frac{ds}{d\alpha}\right|}$$ rayon de courbure en M de la courbe (C)

$$\boxed{\overrightarrow{MC} = R\vec{N}}$$ centre de courbure en M

Dans ces conditions, l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ peut être assimilé à un arc de cercle de centre C et de rayon R ($\overset{\frown}{MM'}$ = R d$\alpha$).

Toute courbe peut donc être <u>localement</u> assimilée à un arc de cercle de centre C et de rayon R (R varie et C se déplace, le long de (C)). 1/R est la courbure.

$$\begin{cases} \text{Pour un cercle :} & R = \text{cste} \\ \text{Pour une droite} & R \to \infty \left(\dfrac{1}{R} = 0\right) \end{cases}$$

**Propriété**

$$\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N} \quad \left(\text{rotation de } \frac{\Pi}{2}\right)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{N}}$$